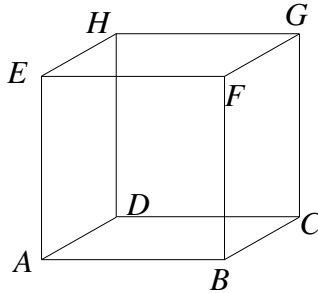


# VECTEURS DE L'ESPACE

## 1. Vecteurs coplanaires

- Les propriétés des vecteurs du plan (égalité, relation de Chasles, colinéarité) s'étendent aux vecteurs de l'espace.
- Deux vecteurs quelconques de l'espace sont toujours coplanaires.
- Trois vecteurs  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$  et  $\vec{u}_3$  sont coplanaires si l'un d'entre eux peut s'écrire comme une combinaison linéaire des deux autres. C'est-à-dire s'il existe  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\vec{u}_1 = \alpha \vec{u}_2 + \beta \vec{u}_3$  (ou peut-être pour  $\vec{u}_2$  ou  $\vec{u}_3$ ).

Exemple : Dans le cube  $ABCDEFGH$  les vecteurs  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AE}$  et  $\vec{AF}$  sont coplanaires car  $\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{AE}$ .



- Dire que les vecteurs  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  et  $\vec{AD}$  sont coplanaires équivaut à dire que les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont coplanaires.
- Trois vecteurs non coplanaires forment une base de l'espace. C'est-à-dire que si  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont trois vecteurs non coplanaires, alors pour tout vecteur  $\vec{u}$  il existe trois réels  $x$ ,  $y$  et  $z$  tels que  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .

## 2. Repère

- Un repère de l'espace est constitué d'un point et de trois vecteurs non coplanaires. Exemple : Dans le cube ci-dessus,  $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$  est un repère de l'espace.
- Un repère de l'espace est orthogonal si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux. Il est orthonormé (ou orthonormal) s'il est orthogonal et si ses vecteurs sont de norme 1. Si  $ABCDEFGH$  est un cube de côté 1, le repère  $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$  est orthonormé.

- c. Dire que le point  $A$  a pour coordonnées  $(x; y; z)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  équivaut à dire que  $\vec{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .

Remarque : Les trois coordonnées d'un point de l'espace s'appellent respectivement l'abscisse, l'ordonnée et la cote.

- d. Les propriétés sur les coordonnées des points et vecteurs du plan (distance, coordonnées d'un vecteur, coordonnées d'une combinaison linéaire de vecteurs,...) s'étendent aux points et vecteurs de l'espace.

### 3. Systèmes d'équations paramétriques d'objets de l'espace

- a. Représentation paramétrique d'une droite

Étant donné un point  $A(x_A; y_A; z_A)$  et un vecteur  $\vec{u}(a; b; c) \neq \vec{0}$ , Le point  $M(x; y; z)$  appartient à la droite  $d$  passant par  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$  si et seulement si il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{AM} = k\vec{u}$ . Donc :

$$M \in d \Leftrightarrow \vec{AM} = k\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = ka \\ y - y_A = kb \\ z - z_A = kc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ka + x_A \\ y = kb + y_A \\ z = kc + z_A \end{cases}$$

Ce dernier système est appelé représentation paramétrique de la droite  $d$ .

Remarque : Une représentation paramétrique d'une droite n'est pas unique.

- b. Représentation paramétrique d'un plan

Étant donné un point  $A(x_A; y_A; z_A)$  et deux vecteurs  $\vec{u}(a; b; c)$  et  $\vec{v}(a'; b'; c')$  non colinéaires, Le point  $M(x; y; z)$  appartient au plan  $P$  passant par  $A$  et de vecteurs directeurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  si et seulement si il existe deux réels  $k$  et  $k'$  tels que  $\vec{AM} = k\vec{u} + k'\vec{v}$ . Donc :

$$M \in d \Leftrightarrow \vec{AM} = k\vec{u} + k'\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = ka + k'a' \\ y - y_A = kb + k'b' \\ z - z_A = kc + k'c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ka + k'a' + x_A \\ y = kb + k'b' + y_A \\ z = kc + k'c' + z_A \end{cases}$$

Ce dernier système est appelé représentation paramétrique du plan  $P$ . Elle n'est pas unique.

### 4. Équations de plans

- a. Produit scalaire dans l'espace

La définition et les propriétés du produit scalaire dans le plan s'étendent à l'espace sans changements.

En particulier, Si  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est un repère orthonormal, et si on a  $\vec{u}(x; y; z)$  et  $\vec{v}(x'; y'; z')$ , alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ .

Remarque : Dans l'espace, on est obligé de considérer des angles de vecteurs non orientés, mais les propriétés restent inchangées.

**b.** Vecteur normal à un plan

On dit que le vecteur  $\vec{u}$  est normal au plan  $P$  s'il est orthogonal à un couple de vecteurs directeurs de  $P$  (c'est-à-dire, deux vecteurs non colinéaires de  $P$ )

Si  $\vec{u}$  est un vecteur normal au plan  $P$  et  $A$  un point de  $P$ ,  $P$  est donc l'ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{AM}$  soit orthogonal à  $\vec{u}$  c'est-à-dire, tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$ .

**c.** Équation cartésienne d'un plan

Si  $P$  est le plan passant par  $A(x_A; y_A; z_A)$  et de vecteur normal  $\vec{u}(a; b; c)$ , alors  $M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$ .

Cette dernière équation est une équation cartésienne de  $P$ .

Réciproquement, Pour tous réels  $a, b, c$  et  $d$  tels que  $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ , l'équation  $ax + by + cz + d = 0$  est l'équation cartésienne d'un plan de vecteur normal  $\vec{u}(a; b; c)$ .